Title	群ニ於ケル Mass ト Topologie ノ関係ニツイテ (A.Weilノ定理ノ証明) I
Author(s)	小平, 邦彦
Citation	全国紙上数学談話会. 175 p.69-p.102
Issue Date	1939-03-06
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/74702
rights	
Note	

772. 群ニ於ケルMaßトTopologieノ関係ニツイテ(A. Weilノ定理ノ証明) I

小平　邦彦(東大)

数年前ノC. R.ニ於テA. Weilハ群ノMaßトTopologieノ間ニ密接ナル関係ガアルコトヲ指摘シテヰル*) —— 群GニTopologieガ與ヘラレタトキ，ソノTopologieニ関シテ$y^{-1}x$ガ連續ナラバ，吾々ハGハTopologische GruppeデアルトイフノデアッタカクノOn如キTopologieハGノ群トシテノ演算ト或ル関聯ヲ有スル、コヽニ於テTopologieノ代リニMaßヲ考ヘタナラバドウナルデアラウカ？一般ニ，Neumannニ從ッテ，Maßヲ有スル空間ノAbbildungハ，meßbarナ集合ノUrbildガ常ニmeßbarナルトキmeßbarデアルトイフコトニスレバ，$y^{-1}x$ノStetigkeitニ相當スルモノハ，$G \times G$ヲGヘabbildenスルAbbildung $y^{-1}x$ノMeßbarkeitデアラウ．Weilハ$y^{-1}x$ガmeßbarデアルトイフコトヲ，$f(x)$ガmeßbarナ函數ナラバ$f(y^{-1}x)$モmeßbarデアル．トイフ形ニ言ヒ現ハシ，カクノ如キ性質ヲモツGノMaßニハein-eindeutigニ$y^{-1}x$ガ連續ナルTopologieガ對應シ，コノTopologieニ関スルGノ„Komplettierung" ヲ$\bar{G}$トスレバ，$\bar{G}$ハim Kleinen kompaktナ群デアッテ，Gニ豫メ與ヘラレテアッタ

*) C. R. Tom. 202, 1147 (1936)

Maß ハ $\overline{G}$ ノ Haar ノ Maß ト一致スル, ト主張スルノデアルガ, コノ証明ハ未ダ発表サレナイ様デアル。

吾々ハ Separabilität ノ假定ノ下ニ於テデハアルケレドモ, 兎モ角コノ一ツノ証明ヲ與ヘルコトガ出來, 又コレニ關係シタ二三ノ定理ヲ証明スル事ガ出來タカラ, 之ヲコヽニ書イテ見タイト思フ。

先ヅ §1. ニ於テ必要ナ概念ヲ説明シ, §2 ニ於テ Haar ノ maß ニ関スル主要ナ定理トソノ証明ヲ述べ, §3 ニ於テ Haar ノ Maß 以外ニモ, Haar ノ Maß ニヨツテ, $y^{-1}x$ ガ meßbar デアルヤウナ links-invariant ナ Maß ガ induzieren サレルコトヲ述べル。コヽデ吾々ハ $y^{-1}x$ ガ meßbar ナル links-invariant ナ Maß ヲ Weil ノ Maß ト名付ケル。§4 ニ於テ Weil ノ Maß ガ Haar ノ Maß ニヨツテ induzieren サレタ Maß ナルタメノ必要且ツ充分ナル條件ヲ述べル。コレハ或ル意味デ Haar ノ Maß ノ Eindeutigkeitssatz ノ拡張デアルト考ヘラレル。§5 ニ於テハ先ヅ Maß ニ関スル Separabilität ノ定義ヲ述べ, separabel ナル Weil ノ Maß ハ, eindeutig ニ定マル im Kleinen kompakt ナ群ノ Haar ノ Maß ニヨツテ induzieren サレタ Maß ナルコトヲ証明スル。コレハ即チ Weil ノ定理ニ他ナラナイ。§6 ニ於テ以上ノ結果ヲ, シバラク Haar ノ Maß カラ離レテ, separabel ナ Weil ノ Maß ト separabel links-invariant ナ allgemeine Metrik ノ間ノ関係トシテ考察スル。コヽデ allgemeine Metrik トイフノハ, 三角不等式ハ成立スル

ケレドモ，必ズシモ Trennungsaxiom ヲ満足シナイ Metrik ノコトデアル。ユークリッド空間ノ Metrik ト Lebesgue ノ Maß ニ關シテハ，Borel set ハ meßbar デアッテ，逆ニ meßbar ナ集合ニ對シテハコレト Maß 0 ヲ除イテ一致スル Borel 集合ガ存在スルコトガ容易ニ分ル。吾々ハ一般ニ群ノ separabel ナ Weil ノ Maß ト separabel links-invariant ナ allgemeine Metrik ノ間ニカクノ如キ關係ガ存在スルトキ，コノ Metrik ハ Maß ニ屬スル Metrik デアルトイフコトヽシ，separabel ナ Weil ノ Maß ニハコレニ屬スル Metrik ガ存在シテ一意的ニ定マルコト，逆ニ separabel ナ Weil ノ Maß ハコレニ屬スル Metrik ヲ與ヘレバ eindeutig ニ定マルコトヲ証明スル。又，separabel ナル Weil ノ Maß トソレニ屬スル Metrik ニ關シテハ，„density" トシテ „upper density" ノミヲ考ヘルナラバ，所謂 "density theorem" 及ビコレニ相當スル Überdeckungssatz ガ成立スルコトヲ証明シ、逆ニ，separabel ナ Weil ノ Maß ト separabel links-invariant ナ allgemeine Metrik ニ關シテ "density theorem"，又ハ Überdeckungssatz ガ成立スルナラバ，コノ Metrik ハ separabel ナ Weil ノ Maß ニ屬スル Metrik デナケレバナラナイコトヲ示ス。最後ノ §7 ニ於テ，Weil ノ Maß ヲ擴張スル問題ヲ考察シ，又コレニ關スル例ヲ述ベル。

§1. Einleitung

1. *Maß*. 空間Rノスベテノ部分集合Aニ對シテ定義サレタ有限又ハ無限大ノ値ヲトル *nicht-negativ* ナ集合函數 $m^*(A)$ ガ次ノ二ツノ條件1), 2) ヲ滿足スルトキ, $m^*(A)$ ヲRノ *Carathéodory* ノ *äußeres Maß* トイフ:

1) $A \subset B$ ナラバ $m^*(A) \leqq m^*(B)$

2) $m^*(A_1+A_2+A_3+\cdots\cdots) \leqq m^*(A_1)+m^*(A_2)+\cdots\cdots$

コノトキ, Rノ部分集合Aガ, スベテノ $X \subset R$ ニ對シテ

$$m^*(X) = m^*(X \frown A) + m^*(X - A)$$

ナル條件ヲ滿足スルナラバ, Aハ *m-meßbar* デアルトイヒ, $m^*(A)$ ヲ $m(A)$ ト書イテ, $m(A)$ ヲAノ *Maß* トヨブ。Rノ任意ノ部分集合Xニ對シテ必ズ

$$A \supset X, \quad m(A) = m^*(X)$$

ナル *m-meßbar* ナ部分集合Aガ存在スルトキ m^* ハ *regular* デアルトイハレル。

Maß ノ定義. 吾々ハ *regular*[1] デアッテ, 條件:

(a) Rハ高々可附番個ノ有限ナ *Maß* ヲ有スル *m-meßbar* ナ部分集合ノ和デアル:

$$R = \sum_{j=1}^{\infty} A_j, \quad m(A_j) < +\infty;$$

1) m^* ガ *regular* デナイトキニハ, *m-meßbar* ナ集合ノ *Maß* ヲ變ヘナイデ, m^* ヲ *regular* ナ *äußeres Maß* ニ直スコトガ出來ル。

ヲ満足スル Carathéodory ノ äußeres Maß m^* ヲ, äußeres Maß, 或ハ單ニ R ノ Maß トイフコトニスル。

R デ定義サレタ複素數値ヲトル函數 $f(x)$ ハ, 複素平面上ノ任意ノ開集合 O ノ Urbild $f^{-1}(O)$ ガ常ニ m-meßbar ナルトキ, m-meßbar デアルトイフ。m-meßbar ナ函數ニ對シテハ "Lebesgue" 積分ヲ考ヘルコトガ出來ル。

コレヲ

$$\int_A f(x)\, m(dx)$$

デ現ハス。但シ A ハ積分範囲デアル。

$$\int_A \left| f(x) \right| m(dx) < +\infty$$

ナルトキ $f(x)$ ハ A デ summierbar デアルトイフ。コノトキ

$$\int_A f(x)\, m(dx)$$

ハ"絶對收斂"デアル。

2. Borel 族. 吾々ハ G ノ部分集合族 $\mathfrak{F}$ ガ次ノ條件 1), 2), 3) ヲ満足スルトキ, $\mathfrak{F}$ ヲ Borel 族トヨブコトニスル:

1) $A, B \in \mathfrak{F}$ ナラバ $A+B,\ A-B,\ A \frown B \in \mathfrak{F}$.

2) $A_j\ (j=1,2,\text{-----}) \in \mathfrak{F}$ ナラバ $\prod_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathfrak{F}$.

3) $R=\sum_{j=1}^{\infty} A_j,\ A_j \in \mathfrak{F}$ ナル A_j ガ存在スル。

$\mathfrak{F}$ ガ Borel 族ナルトキ $\mathfrak{F}$ ニ属スル集合ノ高々可附番個ノ和ノ全体ハ亦 Borel 族ヲ作ル。コレヲ $\tilde{\mathfrak{F}}$ デ現ハス。記号デ書ケバ

$$\tilde{\mathfrak{F}} = \left(X;\ X = \sum_{j=1}^{\infty} A_j,\ A_j \in \mathfrak{F}\right)^{2)}$$

$\tilde{\mathfrak{F}}$ ニ於テハ，明ラカニ

$$A_j = (j=1,2,\cdots\cdots) \in \tilde{\mathfrak{F}} \text{ ナラバ } \sum_{j=1}^{\infty} A_j \in \tilde{\mathfrak{F}}$$

ガ成立スル。

R ノ函数 $f(x)$ ハ開集合 O ノ f ニヨル Urbild $f^{-1}(O)$ ガ $\tilde{\mathfrak{F}}$ ニ含マレルトキ，$\mathfrak{F}$-meßbar デアルトイフ。

m^* ガ R ノ Maß ナルトキ，有限ノ Maß ヲモツ m-meßbar ナ部分集合ノ全体ハ Borel 族ヲ作ル。コレヲ (m) デ現ハス：

$$(m) = (A;\ m(A) < +\infty)$$

然ルトキハ (m)-meßbar ハ m-meßbar ト一致スル。

Borel 族 $\mathfrak{F}$ ニ於テ有限ナ値ヲトル nicht-negativ, total additiv ナル集合函数 μ ガ與ヘラレタトキ，

$X \subset R$ ニ對シテ，

---

2) 一般ニ $\mathfrak{E}$ ナル性質ヲモツ元 x ノ全体ヨリ成ル集合ヲ $(x;\ \mathfrak{E}(x))$ ナル記号デ現ハスコトニスル。コレハ Neumann ノ記号デアル。

$$\mu^*(X) = \underline{\text{fin}} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(A_j), \quad \sum_{j=1}^{\infty} A_j \supset X, \; A_j \in \mathfrak{F};$$

デ定義サレタ μ^* ハ明ラカニ R ノ Maβ デアル. μ^* ヲ μ ニヨッテ決メラレタ R ノ Maβ ト名付ケル。

total additiv ナ集合函数 $\mu = \mu(A)$; $A \in \mathfrak{F}$ ハ

$$\mathfrak{F} \subset (m). \quad m(A) = 0 \text{ ナラバ } \mu(A) = 0$$

ナル條件ヲ満足スルトキ m-absolut stetig デアルトイフ。コノトキ

Nikodym ノ定理. $\mu = \mu(A)$, $A \in \mathfrak{F}$ ガ m-absolut stetig ナルトキハ, μ ハ $\mathfrak{F}$- meßbar ナ函数 $\varphi(x)$ ニヨッテ

$$\mu(A) = \int_A \varphi(x)\, m(dx), \qquad A \in \mathfrak{F}$$

ナル形ニ現ハサレル. $\varphi(x)$ ハ m-Maβ 0 ノ点ヲ除ケバ μ ニヨッテ eindeutig ニ定マル。[3)]

ガ成立ツ。

3. Fubini ノ定理. m^* ヲ空間 R ノ Maβ トスル. コノトキ cartetisches Produkt $R \times R$ ノ任意ノ部分集合 Γ ニ對シテ, $mm^*(\Gamma)$ ヲ次ノ如ク定義スル:

$$mm^*(\Gamma) = \underline{\text{fin}} \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j)\, m^*(B_j),$$

$$\sum_j A_j \times B_j \supset \Gamma;$$

但シコヽデ $\underline{\text{fin}}$ ハ, $\sum_j A_j \times B_j \supset \Gamma$ ナルスベテノ A_j,

3) 証明ハ Saks: Theory of Integral; P. 32—36

B_j (⊂R) ニツイテトルモノトスル。mm^* ハ空間 R×R ノ Maß デアル。コレヲ Produkt-maß ト名付ケル。明ラカニ A, B⊂R ガ m-meßbar ナルトキハ A×B ハ mm-meßbar デアッテ

$$mm(A\times B)=m(A)m(B).$$

R ノ二変数ノ函数 $f(x,y)$ ハ R×R ノ上ノ函数ト考ヘラレル。R×R ノ函数トシテ $f(x,y)$ ガ mm-meßbar ナルトキ，二変数ノ函数 $f(x,y)$ ハ m-meßbar デアルトイヒ，ソノ積分ヲ

$$\int f(x,y)\,mm(d(x,y))$$

又ハ二重積分：

$$\iint f(x,y)\,m(dx)\,m(dy)$$

デ現ハス。然ルトキハ

Fubini ノ定理。 二変数ノ函数 $f(x,y)$ ガ mm-meßbar ナルトキハ，m-Maß 0 ノ x ヲ除ケバ，$f(x,y)$ ハ y ノ函数トシテ m-meßbar デアル。$f(x,y)$ ガ A×B デ summierbar ナルトキハ，A ノ m-Maß 0 ノ x ヲ除ケバ，$f(x,y)$ ハ y ニツイテ B デ summierbar デアッテ，x ノ函数

$$\int_B f(x,y)\,m(dy)$$

ハ A デ summierbar，且

$$\iint_{A\times B} f(x,y)\,m(dx)\,m(dy)$$
$$=\int_A m(dx)\int_B f(x,y)\,m(dy)$$

ガ成立スル。従ッテ又

$$\int_A m(dx)\int_B f(x,y)\,m(dy)$$
$$=\int_B m(dy)\int_A f(x,y)\,m(dx)$$

4. Hilbert空間. m^* ヲ R ノ Maß トスル、コノトキ

$$\int_R |f(x)|^2 m(dx) < +\infty$$

ナル m-meßbar ナ函数 $f(x)$ ノ全体ハ

$$(f,g)=(f,g)_m=\int_R f(x)\,\overline{g(x)}\,m(dx)$$

ヲ inneres Produkt トスル vollständig ナ，必ズシモ separabel デハナイ "Hilbert 空間" ヲ作ル．コレヲ $\mathfrak{H}_R$，或ハ $\mathfrak{H}_R^{(m)}$ デ現ハス．$\mathfrak{H}_R^{(m)}$ ノ元 f ノ "長サ" ヲ $\|f\|$，或ハ $\|f\|_m$ ト書ク：

$$\|f\|=\|f\|_m=\sqrt{(f,f)_m}$$

一般ニ R ノ部分集合 A ノ "charakteristische Funktion" ヲ $e_A(x)$ デ現ハス：スナハチ

$$e_A(x)=\begin{cases}1 & x\in A \text{ ノトキ}\\ 0 & \text{然ラザルトキ}\end{cases}$$

然ルトキハ，$A, B\in(m)$ ナラバ明ラカニ

$$\| e_A - e_B \| = m(A-B) + m(B-A)$$

コレヲ m ニヨッテ定メラレルAトBノ距離ト名付ケ $d_m(A,B)$ デ現ハス：

$$d_m(A, B) = m(A-B) + m(B-A)$$
$$= \| e_A - e_B \|_m .$$

然ルトキハ

定理1. Hilbert 空間 $\mathfrak{H}_R^{(m)}$ ガ separabel ナルタメノ必要且充分ナ條件ハ, Borel 族 (m) ガ距離 d_m ニ関シテ separabel ナルコトデアル。

証明[4] ハ殆ンド明白デアル。

---

4) 充分ナルコトノ証明ハ, 例ヘバ Neumann: Allgemeine Eigenwert theorie Hermitischer Operatoren (Math. Ann. 102) 参照。

必要ナコトハ例ヘバ次ノ如クスレバ分ル：$f_j(x)$ ($j=1, 2, 3, \cdots\cdots$) ヲ $\mathfrak{H}_R$ デ überall dicht ナ可附番集合トシ, $|f_j(x)-1| \leq \frac{1}{2}$ ナル x ノ集合ヲ A_j トスル. $A \in (m)$ 及ビ $\varepsilon > 0$ ガ任意ニ與ヘラレタトキ

$$\| e_A - f_j \|^2 < \varepsilon$$

ナル f_j ガアル. 然ルニ

$$\| e_A - f_j \|^2 = \int_A |1-f_j(x)|^2 m(dx) + \int_{G-A} |f_j(x)|^2 m(dx)$$

デアッテ

$$x \in A - A_j \quad \text{ナラバ} \quad |1-f_j(x)| \geq \frac{1}{2}.$$

$$x \in A_j - A \quad \text{ナラバ} \quad |f_j(x)| \geq \frac{1}{2}$$

(次頁ヘツヅク)

5. Beschränkte Operatoren. $\mathfrak{H}$ ヲ separabel ナ Hilbert空間, $\mathbb{B}_{\mathfrak{H}}$ ヲ $\mathfrak{H}$ ノ beschränkte Operatoren 全体ノ作ル Ring トスル。$\mathbb{B}_{\mathfrak{H}}$ ノ元 P_0 ニ對シテ,

$$\mathfrak{U}(P_0; f_1, \cdots\cdots, f_k, \varepsilon)$$
$$= (P; \|(P-P_0)f_j\| < \varepsilon,\ 1 \leqq j \leqq k)$$

ヲ, $f_1, \cdots\cdots, f_k$ ニヨッテ定メラレル P_0 ノ ε-Umgebung ト名付ケル。コノ $\mathfrak{U}(P; f_1, \cdots\cdots, f_k, \varepsilon)$ ノ全体ヲ Umgebungssystem トシテ定メラレル $\mathbb{B}_{\mathfrak{H}}$ ノ Topologie ヲ stark ナ Topologie トヨブ。$\mathbb{B}_{\mathfrak{H}}$ ハコノ Topologie ニ関シテ vollständig ナル topologischer linearer Raum デアル。[5)]

$\mathfrak{H}$ ノ unitär ナ Operator ヲ U, V, etc. デ現ハシ, unitäre Operatoren 全体ノ作ル群ヲ $\mathbb{U}_{\mathfrak{H}}$ デ現ハス。明カニ $\mathbb{U}_{\mathfrak{H}} \subset \mathbb{B}_{\mathfrak{H}}$ デアル。

定理2. $\mathbb{U}_{\mathfrak{H}}$ ハ stark ナ Topologie ニ関シテ abzählbare Basis ヲ有スル vollständig ナ topologische

(脚註4ノツヾキ)

デアルカラ

$$\frac{1}{4}m(A-A_j)+\frac{1}{4}m(A_j-A)<\varepsilon$$

スナハチ

$$d_m(A, A_j) < 4\varepsilon$$

故ニ A_j $(j=1,2,3,\cdots\cdots)$ ハ (m) デ d_m-überall dicht デアル。

5) Neumann: Topologicaly complete linear space (Trans. Vol. 37) 参照。

Gruppe デアル。$\psi_j\ (j=1,2,\cdots\cdots)\in \mathfrak{h}_y$ ヲ

$$[\psi_1, \psi_2, \psi_3, \cdots\cdots] = \mathfrak{h}_y{}^{6)} \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \|\psi_j\| < +\infty$$

ナル元トスレバ

$$\rho_\psi(U,V) = \sum_{j=1}^{\infty} \|(U-V)\psi_j\|, \quad U, V \in \mathfrak{U}_{\mathfrak{h}_y}$$

ニヨッテ定義サレタ ρ_ψ ハ $\mathfrak{U}_{\mathfrak{h}_y}$ ノ links-invariant ナ Metrik デアッテ，ψ_j ノ選ビ方ニ関係ナク $\mathfrak{U}_{\mathfrak{h}_y}$ ノ stark ナ Topologie ヲ與ヘル．從ッテ $\mathfrak{U}_{\mathfrak{h}_y}$ ハ Metrik ρ_ψ ニ關シテ vollständig デアル。[7)]

証明 I. $U\cdot V$ ハ連続デアル。何トナレバ

---

6) $[\psi_1, \psi_2, \cdots\cdots]$ ハ $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \cdots\cdots$ ヲ含ム最小ノ abgeschlossene lineare Mannigfaltigkeit ヲ現ハス。

7) 一般ニ topologische Gruppe G ニ於テ

$$\lim_{\substack{j\to\infty \\ k\to\infty}} a_j^{-1} a_k = 1$$

ナル Folge $a_j\ (j=1,2,\cdots\cdots)$ ヲ Fundamentalfolge ト名付ケ，Fundamentalfolge ガ必ズ収斂スルトキ，G ハ vollständig デアルトイフ。

G ノ Topologie ガ links-invariant ナ Metrik $\rho(a,b)$ ニヨッテ與ヘラレテヰルトキニハ

$$\rho(a_j^{-1}a_k, 1) = \rho(a_k, a_j)$$

デアルカラ，G ノ Vollständigkeit ハ Metrik ρ ニ関スル Vollständigkeit ト一致スル。

$$U \in \mathfrak{U}(U_0;\, V_0 f_1, \cdots\cdots, V_0 f_k,\, \varepsilon),$$
$$V \in \mathfrak{U}(V_0;\, f_1, \cdots\cdots, f_k,\, \varepsilon)$$

トスレバ

$$\|(UV - U_0V_0)f_j\| \leqq \|U(V-V_0)f_j\| + \|(U-U_0)V_0f_j\| < 2\varepsilon$$

デアルカラ

$$U\cdot V \in \mathfrak{U}(U_0V_0;\, f_1, \cdots\cdots, f_k,\, \varepsilon)$$

証明 II　U^{-1} ハ U ニツイテ連続デアル．何トナレバ

$$U \in \mathfrak{U}(U_0;\, U_0^{-1}f, \cdots\cdots, U_0^{-1}f_k,\, \varepsilon)$$

トスレバ

$$\|(U-U_0)U_0^{-1}f_j\| < \varepsilon$$

故ニ U^{-1} ガ unitär デアルカラ

$$\|(U^{-1}-U_0^{-1})f_j\| < \varepsilon$$

故ニ

$$U^{-1} \in \mathfrak{U}(U_0^{-1};\, f_1, \cdots\cdots, f_k,\, \varepsilon)$$

証明 III. ρ_ψ ガ links-invariant デ $\mathfrak{U}_{\mathfrak{H}}$ ノ starke Topologie ヲ與ヘルコトハ明白デアル．從ッテ $\mathfrak{U}_{\mathfrak{H}}$ ハ separabel デアルカラ，abzählbare Basis ヲ有スルコトガ分ル。[8)]

証明 IV. $\mathfrak{U}_{\mathfrak{H}}$ ハ vollständig デアル．何トナレバ U_j ($j=1,2,3,\cdots\cdots$) ヲ Fundamentalfolge トスレバ，任意ノ $f \in \mathfrak{H}$ ニ對シテ

---

8) 一般ニ metrischer Raum ガ separabel ナラバ，ソレハ abzählbare Basis ヲ有スル。

$$\lim_{\substack{j\to\infty \\ k\to\infty}} \| (U_j^{-1} U_k - 1) f \| = 0,$$

従ツテ

$$\lim \| (U_k - U_j) f \| = 0 ;$$

スナハチ stark ナ Topologie デ

$$\lim (U_k - U_j) = 0$$

デアル．故ニ $\mathbb{B}_{\mathfrak{H}}$ ガ vollständig デ，$\mathbb{U}_{\mathfrak{H}}$ ハ $\mathbb{B}_{\mathfrak{H}}$ 内デ abgeschlossen デアルカラ

$$\lim_{k\to\infty} U_k = U$$

ナル U ガ存在スル。（証明終）

§2. Haar ノ Maß

1. Haar ノ Maß. 吾々ハコノ§ニ於テ Haar ノ Maß ノ諸性質ニツイテ述ベル。先ヅ定義カラ始メヨウ：

Haar ノ Maß ノ定義. abzählbare Basis ヲ有スル im Kleinen kompakt ナ群 $\mathfrak{G}$ ノ Maß μ^* ガ次ノ條件 1)—4) ヲ満足スルトキ，μ^* ヲ $\mathfrak{G}$ ノ Haar ノ Maß トイフ：

1) μ^* ハ links-invariant デアル：$\mu^*(aA) = \mu^*(A)$, $a \in \mathfrak{G}$.

2) A ガ kompakt[9] ナレトキハ $\mu^*(A) < +\infty$

3) $\mathfrak{G}$ ノ Borel set ハ μ-meßbar デアル。

4) $\mathfrak{G}$ ノ任意ノ部分集合 A ニ對シテ

$$B \supset A, \quad \mu^*(A) = \mu(B)$$

（附註9）次頁ヘ）

ナル Borel set B ガ存在スル。

従ッテ Haar ノ Maß ニ於テハ Baire ノ函数ハスベテ meßbar デアッテ，任意ノ meßbar ナ函数ニ對シテ，コレト Maß 0 ヲ除イテ一致スル Baire ノ函數ガ存在スル。

定理3. μ^* ガ $\mathfrak{G}$ ノ Haar ノ Maß ナルトキ，Produkt-maß $\mu\mu^*$[10] ハ $\mathfrak{G}\times\mathfrak{G}$ ノ Haar ノ Maß デアル。

証明. $\mu\mu^*$ ガ Haar ノ Maß ノ満足スベキ條件 1)－4) ヲ満足スルコトヲ確メレバヨイ。コノ中 1)－3) ハ明白デアル．4) ガ成立スルコトヲ示スタメニ，Γ ヲ $\mathfrak{G}\times\mathfrak{G}$ ノ任意ノ部分集合トスル．然ルトキハ

$$\mu\mu^*(\Gamma)=\underline{\lim}\sum_{j=1}^{\infty}\mu^*(A_j)\,\mu^*(B_j),$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}A_j\times B_j\supset\Gamma.$$

コノ式ニ於テ μ^* ハ Haar ノ Maß デアルカラ，A_j, B_j ハ $\mathfrak{G}$ ノ Borel set ト考ヘテヨイ．従ッテ $A_j^{(N)}$, $B_j^{(N)}$ ナル Borel set ヲ適当ニ選ベバ

$$\mu\mu^*(\Gamma)=\lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\mu(A_j^{(N)})\,\mu(B_j^{(N)}),$$

$$\sum_{j=1}^{\infty}A_j^{(N)}\times B_j^{(N)}\supset\Gamma$$

9) 吾々ハ "kompakt" ヲ kompakt in $\mathfrak{G}$ ノ意味ニ用ヒル.

10) $\mu\mu^*$ ノ定義ニツイテハ §1. Nr 3 参照.

コヽニ於テ

$$\Delta=\prod_{=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}A_j^{(N)}\times B_j^{(N)}$$

トオケバ，明ラカニΔハΓヲ含ムBorel setデアッテ，

$$\mu\mu(\Delta)\leqq\mu\mu\Big(\sum_{j=1}^{\infty}A_j^{(N)}\times B_j^{(N)}\Big)$$

$$\leqq\sum_{j=1}^{\infty}\mu(A_j^{(N)})\,\mu(B_j^{(N)})$$

故ニ $N\to\infty$ トスレバ，$\Delta\supset\Gamma$デアルカラ

$$\mu\mu(\Delta)=\mu\mu^*(\Gamma).\qquad\text{(証明終)}$$

2. *Eindeutigkeit.* コヽデHaarノMaßノ一意性ヲ証明スル。

定理4.（Eindeutigkeitssatz）Abzählbare Basisヲ有スルim Kleinen kompaktナ群$\mathfrak{G}$ノHaarノMaßハmultiplikativナKonstantヲ考ヘニ入レナケレバ，eindeutigニ定マル。

証明. (B)ヲ$\mathfrak{G}$ノkompaktナBorel set全体ヨリ成ルBorel族トスル。μ_1^*, μ_2^*ヲ$\mathfrak{G}$ノ二ツノHaarノMaßトスレバ

$$\mu^*(A)=\mu_1^*(A)+\mu_2^*(A),\qquad A\subset\mathfrak{G}$$

ニヨッテ定義サレタμ^*モ亦HaarノMaßデアッテ，(B)デ考ヘレバ，μ_1ハμ-absolut-stetigナtotal additive Mengenfunktionデアル。従ッテ，Nikodymノ定理ニヨッテ

$$\mu_1(B)=\int_B \varphi(x)\,\mu(dx) \qquad B\in(B)$$

ナル Baire ノ函數 $\varphi(x)$ ガ存在スル。然ルニ μ_1, μ 共ニ links-invariant デアルカラ, 任意ノ $a\in\mathfrak{G}$ ニ對シテ

$$\mu_1(B)=\int_B \varphi(a^{-1}x)\,\mu(dx)$$

故ニ, $\varphi(a^{-1}x)$ ト $\varphi(x)$ ハ μ-Maß 0 ヲ除イテ一致スル: スナハチ

$$\int_{\mathfrak{G}}|\varphi(a^{-1}x)-\varphi(x)|\,\mu(dx)=0$$

故ニ

$$\int_{\mathfrak{G}}\mu(da)\int_{\mathfrak{G}}|\varphi(a^{-1}x)-\varphi(x)|\,\mu(dx)=0$$

然ルニ, $\varphi(a^{-1}x)$ ハ $\mathfrak{G}\times\mathfrak{G}$ ノ Baire ノ函數デアルカラ, $\mu\mu$-meßbar デアル。故ニ Fubini ノ定理ニヨッテ

$$\int_{\mathfrak{G}}\mu(dx)\int_{\mathfrak{G}}|\varphi(a^{-1}x)-\varphi(x)|\,\mu(da)=0$$

故ニ μ-Maß 0 ノ x-Menge X_0 ヲ除ケバ, x ニヨッテ定マル μ-Maß 0 ノ a-Menge $A_0(x)$ ガアッテ

$$a\notin A_0(x) \text{ ノトキ } \varphi(a^{-1}x)=\varphi(x)$$

トナル。今 x, y ヲ $\notin X_0$ ナル任意ノ二元トスレバ

$$\mu(x^{-1}A_0(x))=0, \quad \mu(y^{-1}\ \ _0(y))=0$$

デアルカラ $-x^{-1}A_0(x)$ ト $-y^{-1}A_0(y)$ ハ共通元ヲ有

スル[11]。コノ共通元ノ一ツヲcトスレバ

$$c = x^{-1}a = y^{-1}b, \quad a \in A_0(x), \quad b \in A_0(y).$$

故ニ

$$a^{-1}x = b^{-1}y,$$

従ッテ

$$\varphi(x) = \varphi(y).$$

スナハチ μ-Maß 0 ノ X_0 ヲ除ケバ $\varphi(x)$ ハ konstant デアル。コノ Konstant ヲ γ_1 トオケバ,

$$\mu_1(B) = \gamma_1 \mu(B) \qquad B \in (B).$$

然ルニ Haar ノ Maß ハ (B) ノ集合 B ニ對スル値ヲ與ヘレバ eindeutig ニ定マル。[12] 故ニ

$$\mu_1^*(A) = \gamma_1 \mu^*(A), \qquad A \subset \mathfrak{G}$$

全ク同様ニ

$$\mu_2^*(A) = \gamma_2 \mu^*(A).$$

故ニ

$$\mu_1^*(A) : \mu_2^*(A) = \gamma_1 : \gamma_2 \qquad \text{(証明終)}$$

コノ Eindeutigkeitssatz ニヨッテ次ノ定理5ガ簡單ニ証明サレル。

定理5.[13] μ^* ガ $\mathfrak{G}$ ノ Haar ノ Maß ナルトキ，任意

---

11) 勿論 $\mu(\mathfrak{G}) = 0$ ナル場合ハ除外スル。

12) 一般ニ separabel ナ metrischer Raum ハ abzählbare Basis ヲ有スル。

13) コノ定理ハ Eindeutigkeitssatz ニヨラズ直接ニモ証明サレル。§4 補助定理参照。

ノ $A \subset \mathfrak{G}$ ニ對シテ $\mu^*(A)$ ハ A ヲ含ム開集合 Θ ノ Maß ノ下限デアル：

$$\mu^*(A) = \inf_{\Theta \supset A} \mu(\Theta).$$

証明．$A \subset \mathfrak{G}$ ニ對シテ

$$\bar{\mu}^*(A) = \inf_{\Theta \supset A} \mu(\Theta)$$

トオケバ $\bar{\mu}^*$ モ亦 Haar ノ Maß デアッテ，開集合 Θ ニ對シテハ $\bar{\mu}(\Theta)$ ト $\mu(\Theta)$ ハ一致スル．故ニ Eindeutigkeitssatz ニヨッテ

$$\bar{\mu}^*(A) = \mu^*(A). \qquad \text{(証明終)}$$

3. Hilbert 空間 $\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}^{(\mu)}$．$\mathfrak{G}$ ヲ abzählbare Basis ヲ有スル im Kleinen kompakt ナ群，μ^* ヲソノ Haar ノ Maß トシ，$\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}} = \mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}^{(\mu)}$ ヲ μ-quadrat summierbar ナ函数全体ノ作ル Hilbert 空間，$\mathfrak{U}_{\mathfrak{G}} = \mathfrak{U}_{\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}}$ ヲ $\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}$ ノ unitär ナ Operator 全体ノ作ル群トスル．定理5ヨリ直チニ分ル如ク[14]，$\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}$ ハ separabel デアルカラ，定理2ニヨレバ，$\mathfrak{U}_{\mathfrak{G}}$ ハ stark ナ Topologie ニ関シテ abzählbare Basis ヲ有スル vollständig ナ topologische Gruppe デア

---

14) 何トナレバ：$\mathfrak{G}$ ノ abzählbare Basis ヲ $(\Theta_j;\ j=1, 2, \ldots\ldots)$ トシ，Θ_j ノ有限個ノ和ノ全体ヨリ成ル集合族ヲ (Θ) トスレバ，明ラカニ (Θ) ハ (μ) デ überall dicht ナ可附番集合デアル．故ニ定理1ニヨッテ $\mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}$ ハ separabel デアル。

ル。コノトキ

定理6. $\mathfrak{G}$ ノ元 a ニ對シテ, U_a ヲ

$$U_a f(x) = f(a^{-1}x), \qquad f(x) \in \mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}$$

ニヨッテ定義サレタ unitärer Operator トスル。然ルトキハ

$$a \longrightarrow U_a$$

ナル Abbildung ニヨッテ, $\mathfrak{G}$ ハ $\mathfrak{U}_{\mathfrak{G}}$ 内ニ topologisch isomorph ニ einbetten サレル。

證明. I) $a \to U_a$ ハ明ラカニ Isomorphismus デアル。[15)]

II) $a \longrightarrow U_a$ ハ連續デアル。スナハチ $\lim\limits_{N\to\infty} a_N = a_0$ ナルトキハ, stark ナ Topologie デ $\lim\limits_{N\to\infty} U_{a_N} = U_{a_0}$ デアル。何トナレバ, i) Θ ヲ $\mu(\Theta) < +\infty$ ナル開集合トスレバ

---

15) 何トナレバ, 明ラカニ

$$U_a U_b = U_{ab}$$

デアルカラ, $a \neq b$ ナルトキ $U_a \neq U_b$ ナルコトヲ示セバヨイ。コノタメニ, Θ ヲ 1 ノ充分小サイ近傍トスレバ

$$a\Theta \frown b\Theta = 0$$

デアル。從ッテ Θ ノ charakteristische Funktion ヲ e_Θ トスレバ,

$$\| U_a e_\Theta - U_b e_\Theta \| = \| e_{a\Theta + b\Theta} \| = 2\mu(\Theta) > 0$$

故ニ $U_a \neq U_b$ ——— 。

$$F_j \subset F_{j+1}, \quad \sum_{j=1}^{\infty} F_j = \Theta$$

ナル kompakt ナ閉集合 F_j ($j=1, 2, 3, \cdots\cdots$) ガ存在スル。$\lim a_N = a_0$ デアルカラ，j ニ對シテ $N(j)$ ヲ充分大キクトレバ，

$$N \geqq N(j) \text{ ノトキ} \qquad a_N F_j \subset a_0 \Theta, \quad a_0 F_j \subset a_N \Theta$$

トナル；從ッテ

$$d_\mu(a_N \Theta, a_0 \Theta) \leqq 2\mu(\Theta - F_j).$$

故ニ

$$\lim_{j \to \infty} \mu(\Theta - F_j) = 0$$

デアルカラ

$$\lim_{N \to \infty} d_\mu(a_N \Theta, a_0 \Theta) = 0$$

從ッテ，Θ ノ charakteristische Funktion ヲ e_Θ トスレバ

$$\lim_{N \to \infty} \| (U_{a_N} - U_{a_0}) e_\Theta \| = 0.$$

ii) A ヲ μ-Maß ガ有限ナ任意ノ μ-meßbar ナ集合トスルトキ，定理 5 ニヨレバ，任意ノ $\varepsilon > 0$ ニ對シテ

$$\Theta \supset A, \qquad \mu(\Theta - A) < \varepsilon$$

ナル開集合 Θ ガ存在スル．從ッテ

$$\| e_A - e_\Theta \| < \varepsilon.$$

故ニ

$$\lim_{N \to \infty} \| (U_{a_N} - U_{a_0}) e_A \| = 0$$

デナケレバナラナイ。

iii) 然ルニ任意ノ $f \in \mathfrak{H}_{\mathfrak{G}}$ ハ $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_{A_j}$ ナル形ノ函数ノ limit トシテ現ハサレル．故ニ

$$\lim_{N\to\infty} \| (U_{a_N} - U_{a_0}) f \| = 0.$$

スナハチ

$$\lim_{N\to\infty} U_{a_N} = U_{a_0}$$

デアル。

III) $\lim_{N\to\infty} U_{a_N} = U_{a_0}$ ナラバ $\lim_{N\to\infty} a_N = a_0$ デアル．
何トナレバ Θ ヲ 1 ノ任意ノ近傍トシタトキ，

$$\lim_{N\to\infty} \| U_{a_N} e_\Theta - U_{a_0} e_\Theta \| = 0$$

スナハチ

$$\lim_{N\to\infty} d_\mu (a_N\Theta,\ a_0\Theta) = 0$$

デアルカラ，N ガ充分大ナラバ

$$a_N\Theta \frown a_0\Theta \neq 0,$$

従ッテ，

$$a_N \in a_0\, \Theta\Theta^{-1}$$

デアル。故ニ

$$\lim_{N\to\infty} a_N = a_0$$

—— I), II), III) ニヨッテ $a \to U_a$ ガ topologisch isomorph ナ Einbettung ナルコトガワカル。[16)]

---

16) $a \to U_a$ ノ連続性カラ次ノ定理ガ得ラレル：定理 $\mu(A) > 0$ ナラバ $A \cdot A^{-1}$ ハ単位元ノ近傍ヲ含ム。（次頁ヘツヅク）

§ 3. Weil ノ Maß

1. Weil ノ Maß. 定義. 吾々ハ, 群 G ノ Maß m^* ガ次ノ二ツノ條件 1), 2) ヲ滿足スルトキ, m^* ヲ G ノ Weil ノ Maß トイフコトニスル:

1) m^* ハ links-invariant デアル:

$$m^*(aA) = m^*(A), \quad a \in G.$$

2) $f(x)$ ガ G ノ m-meßbar ナ函數ナルトキ, 二變數 x, y ノ函數 $f(y^{-1}x)$ モ m-meßbar デアル。[17)]

Weil ノ Maß ハ種々ノ著シイ性質ヲ有スル. 例ヘバ

定理 7. m^* ヲ G ノ Weil ノ Maß トスル. コノトキ, G ノ部分集合 A ガ m-meßbar ナラバ A^{-1} モ m-meßbar デアッテ, $m(A) = 0$ ナルトキハ $m(A^{-1}) = 0$ デアル。

證明. A ノ charakteristische Funktion ヲ $e_A(x)$ トスレバ, $e_A(y^{-1}x)$ ガ m-meßbar デアル. 然ルニ

(脚註 16 ・ツヅキ) 證明: $a \to U_a$ ガ stetig デアルカラ $\lim a = 1$ ノトキ

$$\lim \| U_a e_A - e_A \| = 0$$

從ッテ

$$aA \cap A \neq 0$$

故ニ a ガ十分 1 ニ近イトキ $a \in A \cdot A^{-1}$ デアル. ——

17) $f(y^{-1}x)$ ガ m-meßbar トイフノハ mm-meßbar ノ意味デアル. §1. Nr. 3 參照。

$$e_A(y^{-1}x) = e_{xA^{-1}}(y)$$

デアルカラ，Fubini ノ定理ニヨッテ，xA^{-1} ハ Maß 0 ノ x ヲ除ケバ m-meßbar デアル。従ッテ，m ガ linksinvariant デアルカラ，A^{-1} ハ m-meßbar デナケレバナラナイ。特ニ $m(A)=0$ ナルトキハ

$$\int_G m(dx)\int_G e_A(y^{-1}x)\, m(dy) = \int_G m(dy)\int_G e_A(y^{-1}x)\, m(dx) = 0$$

デアルカラ

$$m(A^{-1}) = \int_G e_A(y^{-1}x)\, m(dy) = 0$$

—— Haar ノ Maß ハ Weil ノ Maß デアルガ，其ノ他ニモ Haar ノ Maß ヨリ „induzieren" サレル Weil ノ Maß ガ存在スル。以下之ヲ述ベル。

2. Haar ノ Maß ニヨッテ induzieren サレタ Maß. $\mathfrak{G}$ ヲ abzählbare Basis ヲ有スル im Kleinen kompakt ナ群，μ^* ヲソノ Haar ノ Maß トシ，G ヲソノ Normalteiler N ニヨル Restklassengruppe G/N ガ $\mathfrak{G}$ ニ含マレル群トスル： $G/N \subset \mathfrak{G}$.
G ノ元ヲ，一般ニ a, b, x, y, etc.，部分集合ヲ A，B, etc. デ現シ，$\mathfrak{G}$ ノ元ヲ ξ, η, etc.，部分集合ヲ $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$, etc. デ現ハスモノトシ，$a \in G$ ノ mod, N Restkllasse ヲ

$$r(a) = r_N(a) = r_{\mathrm{mod}\,N}(a) \quad \text{etc.}$$

書ク。[18] $a \to r(a)$ ハスナハチ homomorph ナ

弁註 18) ハ次頁ニ)

Abbildung デアル．$\mathfrak{r}$ ノ „*Umkehrung*" ヲ $\mathfrak{r}^{-1}$ デ現ハス．コノトキ

定理8．$A \subset G$ ニ對シテ

$$m^*(A) = \mu^*(\mathfrak{r}(A))$$

トオケバ，$m^* = m^*(A)$ ハ G ノ *links-invariant* ナ *Maß*[19] デアッテ．$\mathfrak{A} \subset \mathfrak{g}$ ガ *μ-meßbar* ナルトキハ，$\mathfrak{r}^{-1}(\mathfrak{A})$ ハ *m-meßbar* デアル。

證明．i) m^* ガ *links-invariant* ナ *Carathéodory* ノ *äußeres Maß* ナルコトハ明白デアル。
ii) $\mathfrak{A}$ ヲ *μ-meßbar* トスレバ，任意ノ $A \subset G$ ニ對シテ

$$\begin{aligned} m^*(A) = \mu^*(\mathfrak{r}(A)) &= \mu^*(\mathfrak{r}(A) \frown \mathfrak{A}) + \mu^*(\mathfrak{r}(A) - \mathfrak{A}) \\ &= m^*(A \frown \mathfrak{r}^{-1}(\mathfrak{A})) + m^*(A - \mathfrak{r}^{-1}(\mathfrak{A})) \end{aligned}$$

デアルカラ，$\mathfrak{r}^{-1}(\mathfrak{A})$ モ *m-meßbar* デアル．iii) 從ッテ G モ *m-Maß* ガ有限ナ集合ノ可附番個ノ和トシテ現ハサレル．iv) 任意ノ A ニ對シテ

$$\mathfrak{A} \supset \mathfrak{r}(A), \quad \mu(\mathfrak{A}) = \mu^*(\mathfrak{r}(A))$$

ナル *μ-meßbar* ナ集合 $\mathfrak{A}$ ガ存在スル．コノトキ明ラカニ

$$\mathfrak{r}^{-1}(\mathfrak{A}) \supset A$$

デアッテ，

$$m^*(A) \leqq m(\mathfrak{r}^{-1}(\mathfrak{A})) = \mu^*(\mathfrak{A} \frown G/N) \leqq \mu(\mathfrak{A}) = \mu^*(\mathfrak{r}(A)) = m^*(A)$$

---

18) コノ記号ニヨレバ，$\mathfrak{r}(G) = G/N$．

$$\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}^{-1}(\mathfrak{A}) = \mathfrak{A} \frown \mathfrak{r}(G) = \mathfrak{A} \frown (G/N).$$

19) §1，Nr. 1 *Maß* ノ定義參照．

故ニ

$$m^*(A)=m(r^{-1}(\alpha)).$$

故ニ m^*ハ regular デアル。　（証明終）

定義。　$\mathfrak{G}-G/N$ ノ μ-inneres Maß ガ 0：

$$\mu_*(\mathfrak{G}-G/N)=0$$

ナルトキ

$$m^*(A)=\mu^*(r(A)),\qquad A\subset G$$

ニヨッテ定義サレタ G ノ Maß m^* ヲ Haar ノ Maß μ^* ニヨッテ induzieren サレタ Maß ト名付ケ，m^*_μ デ現ハス；スナハチ

$$m^*_\mu(A)=\mu^*(r(A)),\qquad A\subset G.$$

コノトキ，$G=G/N=\mathfrak{G}$ ナラバ，明ラカニ m^*_μ ト μ^* ハ一致スル。[20]

---

20) 一般ニ m^* ガ空間 R ノ Maß ナルトキ，R ノ部分集合 X ニ對シテ，X ニ含マレル m-meßbar ナ部分集合 A ノ Maß ノ上限ヲ X ノ m-inneres Maß ト名付ケ $m_*(X)$ デ現ハス。記号デ書ケバ

$$m_*(X)=\overline{\mathrm{fin}}_{A\subset X}\, m(A),\qquad A\text{ハ } m\text{-meßbar}$$

コノトキ，ヨク知ラレテヰル如ク，A ガ m-meßbar ナラバ

$$m(A)=m^*(A\frown X)+m_*(A-X)$$

ガ成立スル ——— 。

$\mu_*(\mathfrak{G}-G/N)=0$ ノトキ，G/N ガ μ-meßbar ナラバ $G/N=\mathfrak{G}$ デナケレバナラナイ；従ッテ $G/N\neq\mathfrak{G}$ ナラバ G/N ハ μ-meßbar デナイ。吾々ハ後デカクノ如キ G/N ノ例ヲ超限帰納法ヲ用ヒテ構成スル。

定理9. $G/N \subset \mathfrak{G}$ ナルトキ, G ノ Maß m^* ガ $\mathfrak{G}$ ノ Haar ノ Maß μ ニヨツテ induzieren サレタ Maß ナルタメノ必要且充分ナ條件ハ, 次ノ 1) 及ビ 2) ガ成立スルコトデアル:

1) $\mathfrak{L}$ ガ $\mathfrak{G}$ ノ Borel set ナラバ $r^{-1}(\mathfrak{L})$ ハ m-meßbar デアツテ

$$m(r^{-1}(\mathfrak{L})) = \mu(\mathfrak{L}).$$

2) 任意ノ $A \subset G$ ニ對シテ

$$r^{-1}(\mathfrak{L}) \supset A, \quad m^*(A) = m\bigl(r^{-1}(\mathfrak{L})\bigr)$$

ナル Borel set $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{G}$ ガ存在スル。

證明. a) 必要ナルコトヲ示スタメニ, $m^* = m^*_\mu$ トスル。 1) $\mathfrak{L}$ ヲ Borel set トスレバ

$$\mu_*(\mathfrak{L} - G/N) \leqq \mu_*(\mathfrak{G} - G/N) = 0$$

デアルカラ

$$\mu(\mathfrak{L}) = \mu^*(\mathfrak{L} \frown G/N).$$

故ニ

$$m(r^{-1}(\mathfrak{L})) = \mu^*(\mathfrak{L} \frown G/N) = \mu(\mathfrak{L}).$$

2) 任意ノ A ニ對シテ

$$\mathfrak{L} \supset r(A), \quad \mu^*(r(A)) = \mu(\mathfrak{L})$$

ナル Borel set $\mathfrak{L}$ ガ存在スル. コノトキ, 明ラカニ

$$r^{-1}(\mathfrak{L}) \supset A$$

デアツテ, 1) ノ結果ヲ利用スレバ,

$$m^*(A) = \mu^*(r(A)) = \mu(\mathfrak{L}) = m(r^{-1}(\mathfrak{L})).$$

b) 充分ナルコトノ證明. I) m^* ガ 1) 及ビ 2) ヲ滿

足スルモノトスル。コノトキ，$\mathfrak{L} \subset \mathfrak{G} - G/N$ ナル Borel set $\mathfrak{L}$ ニ對シテハ $r^{-1}(\mathfrak{L}) = 0$ デアルカラ，1) ニヨッテ

$$\mu(\mathfrak{L}) = m(r^{-1}(\mathfrak{L})) = 0$$

トナル。從ッテ

$$\mu_*(\mathfrak{G} - G/N) = 0.$$

II) 任意ノ $A \subset G$ ニ對シテ 2) ヲ滿足スル $\mathfrak{L}$ ヲトレバ

$$m^*(A) = m(r^{-1}(\mathfrak{L})) = \mu(\mathfrak{L}) = m_\mu(r^{-1}(\mathfrak{L})) \geqq m_\mu^*(A).$$

m_μ モ亦 1) 2) ヲ滿足スルカラ，同様ニシテ，

$$m_\mu^*(A) \geqq m^*(A)$$

ナルコトガ分ル。故ニ

$$m^* = m_\mu^*. \qquad \text{（証明終）}$$

3. Cartetisches Produkt. $G/N \subset \mathfrak{G}$ ナルトキハ

$$G \times G / N \times N = G/N \times G/N \subset \mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$$

ト考ヘラレル。[21] コノトキ

定理10. m^* ガ $\mathfrak{G}$ ノ Haar ノ Maß μ^* ニヨッテ

---

21) $K \times R$ ハ $x, y \in R$ ナル Paar(x, y) ノ全体ヨリ成ル空間デアル。§1. Nr. 3 参照。$G \times G/N \times N \subset \mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$ ナル Einbettung ハ

$$r_{N\times N}(x, y) = (r_N(x), r_N(y))$$

デ與ヘラレル。吾々ハ簡單ノタメ，r_N，$r_{N\times N}$ ヲ共ニ同ジ文字 r デ表ハス。

induzieren サレタGノ Maß ナルトキハ, cartetisches Produkt G×G ノ Maß mm^* ハ, $\mathfrak{G}\times\mathfrak{G}$ ノ Haar ノ Maß $\mu\mu^*$ ニヨッテ induzieren サレタ Maß デアル. 記号デ書ケバ

$$m_\mu\cdot m_\mu^* = m^*_{\mu\mu}.$$

証明. mm^* ガ定理 9 ノ條件 1) 及ビ 2) ヲ満足スルコトヲ示セバヨイ。

1) $\textcircled{H}$ ヲ $\mathfrak{G}\times\mathfrak{G}$ ノ開集合トスレバ, $\textcircled{H}$ ハ $\mathfrak{G}$ ノ Borel set $\mathfrak{a}_j$, $\mathfrak{b}_j$ ニヨッテ互ニ共通点ヲ有シナイ "矩形" $\mathfrak{a}_j\times\mathfrak{b}_j$ ノ高々可附番個ノ和トシテ表ハサレル:

$$\textcircled{H}=\sum_{j=1}^{\infty}\mathfrak{a}_j\times\mathfrak{b}_j$$

從ッテ

$$r^{-1}(\textcircled{H})=\sum_{j=1}^{\infty}r^{-1}(\mathfrak{a}_j)\times r^{-1}(\mathfrak{b}_j).$$

然ルニ, $r^{-1}(\mathfrak{a}_j)$, $r^{-1}(\mathfrak{b}_j)$ ハ m-meßbar デアッテ

$$m(r^{-1}(\mathfrak{a}_j))=\mu(\mathfrak{a}_j),\qquad m(r^{-1}(\mathfrak{b}_j))=\mu(\mathfrak{b}_j)$$

デアルカラ, $r^{-1}(\textcircled{H})$ ハ mm-meßbar デ

$$mm(r^{-1}(\textcircled{H}))=\mu\mu(\textcircled{H})$$

デアル。

從ッテ, 一般ニ $\mathfrak{G}\times\mathfrak{G}$ ノ Borel set ハ mm-meßbar デアル。Δ ヲ $\mathfrak{G}\times\mathfrak{G}$ ノ Borel set トシ, 一般ニ $\textcircled{H}$ デ開集合ヲ表ハスコトニスレバ,

$$\mu\mu(\Delta) = \underline{\mathrm{fin}}_{Ⓗ\supset\Delta} \mu\mu(Ⓗ)$$

$$= \underline{\mathrm{fin}}_{Ⓗ\supset\Delta} mm(r^{-1}(Ⓗ)) \geqq mm(r^{-1}(\Delta)).$$

然ルニ，Ⓗ $\supset \Delta$ トスレバ，$mm(r^{-1}(Ⓗ)) = \mu\mu(Ⓗ)$ デアルカラ

$$mm(r^{-1}(\Delta)) + mm(r^{-1}(Ⓗ - \Delta)) = \mu\mu(\Delta) + \mu\mu(Ⓗ - \Delta)$$

故ニ，上ノ不等式ハ等式デナケレバナラナイ：

$$mm(r^{-1}(\Delta)) = \mu\mu(\Delta).$$

2) Γ ヲ $G \times G$ ノ任意ノ部分集合トスル．然ルトキハ

$$mm^*(\Gamma) = \underline{\mathrm{fin}} \sum_{j=1}^{\infty} m^*(A_j) m^*(B_j), \quad \sum_j A_j \times B_j \supset \Gamma.$$

然ルニ，$m^* = m^*_\mu$ デアルカラ，

$$r^{-1}(\mathfrak{a}_j) \supset A_j, \quad m^*(A_j) = \mu(\mathfrak{a}_j);$$

$$r^{-1}(\mathfrak{b}_j) \supset B_j, \quad m^*(B_j) = \mu(\mathfrak{b}_j).$$

ナル $\mathfrak{G}$ ノ Borel set $\mathfrak{a}_j$, $\mathfrak{b}_j$ ガ存在スル．從ッテ，Borel set $\mathfrak{a}_j^{(N)}$, $\mathfrak{b}_j^{(N)}$ ヲ適當ニ選ンデ

$$mm^*(\Gamma) = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mu(\mathfrak{a}_j^{(N)}) \mu(\mathfrak{b}_j^{(N)}).$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mathfrak{a}_j^{(N)} \times \mathfrak{b}_j^{(N)} \supset \Gamma$$

ナラシメルコトガ出來ル．コゝデ

$$\Delta = \prod_{N=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \mathfrak{a}_j^{(N)} \times \mathfrak{b}_j^{(N)}$$

トオケバ，明ラカニ Δ ハ $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$ ノ Borel set デアッテ，

$$r^{-1}(\Delta) \supset \Gamma$$

且ツ

$$mm(r^{-1}(\Delta)) = \mu\mu(\Delta) \leqq \sum_{j=1}^{\infty} \mu(\mathfrak{a}_j^{(N)})\mu(\mathfrak{b}_j^{(N)});$$

従テ，$N \to \infty$トスレバ

$$mm(r^{-1}(\Delta)) = mm^*(\Gamma).$$

故ニ，定理9ニヨッテ

$$mm^* = m^*_{\mu\mu} \qquad \text{（証明終）}$$

4. 定理11. Haar ノ Maß ニヨッテ induzieren サレタ Maß ハ Weil ノ Maß デアル。スナハチ，$G/N \subset \mathfrak{G}$，m^*ヲ$\mathfrak{G}$ノ Haar ノ Maß ニヨッテ induzieren サレタ G ノ Maß トスレバ，m^*ハ links-invariant デアッテ，$x \in G$ノ函数$f(x)$ガ m-meßbar ナルトキ，二変数x, yノ函数$f(y^{-1}x)$モm-meßbar デアル。

証明：m^*ガ links-invariant ナルコトハ既ニ定理8デ証明シタ．次ニ，$\mathfrak{b}$ヲ$\mathfrak{G}$ノ Borel set トスレバソノ charakteristische Funktion $e_{\mathfrak{b}}(\xi)$ハ$\xi(\in \mathfrak{G})$ノ Baire ノ函数デアルカラ，$e_{\mathfrak{b}}(\eta^{-1}\xi)$ハ$\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$ノ Baire ノ函数デアル。然ルニ定理10ニ依レバ

$$mm^* = m^*_{\mu\mu}$$

デアルカラ，定理9ニヨッテ[22]

$$e_{\mathfrak{b}}(r(y^{-1}x))$$

ハ G×G ノ mm-meßbar ナ函数デアル。従ッテ

（脚註22）ハ次頁へ

$$e_{\mathfrak{b}}(r(x)) = e_{r^{-1}(\mathfrak{b})}(x)$$

デアルカラ

$$e_{r^{-1}(\mathfrak{b})}(y^{-1}x)$$

ハ，二変数 $x, y \in G$ ノ m-meßbar ナ函数デアル。

今，A_0 ヲ G ノ m-Maß 0 ナル部分集合トスレバ，

$m^* = m^*_\mu$ デアルカラ，

$$r^{-1}(\mathfrak{b}_0) \supset A_0, \quad m(r^{-1}(\mathfrak{b}_0)) = 0$$

ナル $\mathfrak{O}_j$ ノ Borel set $\mathfrak{b}_0$ ガ存在スル。charakteristische Funktion ニツイテ考ヘレバ

$$e_{r^{-1}(\mathfrak{b}_0)}(x) \geqq e_{A_0}(x),$$

従ツテ

$$e_{r^{-1}(\mathfrak{b}_0)}(y^{-1}x) \geqq e_{A_0}(y^{-1}x).$$

然ルニ $e_{r^{-1}(\mathfrak{b}_0)}(y^{-1}x)$ ハ m-meßbar デアッテ，

$$\int_G e_{r^{-1}(\mathfrak{b}_0)}(y^{-1}x)\, m(dx) = m(r^{-1}(\mathfrak{b}_0)) = 0$$

デアルカラ，Fubini ノ定理ニヨッテ

$$\iint_{G\times G} e_{r^{-1}(\mathfrak{b}_0)}(y^{-1}x)\, m(dx)\, m(dy)$$

$$= \int_G m(dy) \int_G e_{r^{-1}(\mathfrak{b}_0)}(y^{-1}x)\, m(dx) = 0;$$

---

22) 一般ニ $m = m_\mu$ ナルトキ，$f(\xi)$ ガ Baire ノ函数ナラバ $F(x) = f(r(x))$ ハ x ノ m-meßbar ナ函数デアル。何トナレバ，O ヲ任意ノ開集合トスレバ，$f^{-1}(O)$ ハ Borel 集合デアルカラ，定理9ニヨッテ $F^{-1}(O) = r^{-1}f^{-1}(O)$ ハ m-meßbar デアル。

故ニ，$e_{\gamma^{-1}(\mathfrak{B}_0)}(y^{-1}x)$，従ッテ $e_{A_0}(y^{-1}x)$ ハ，$G\times G$ ニ於テ mm-Maß 0 ノ点ヲ除イテ 0 デアル。故ニ

$$e_{A_0}(y^{-1}x)$$

ハ x, y ノ m-meßbar ナ函数デアル。

然ルニ，A ヲ G ノ任意ノ m-meßbar ナ部分集合トスレバ，

$$\gamma^{-1}(\mathfrak{B})\supset A,\quad m(\gamma^{-1}(\mathfrak{B})-A)=0$$

ナル $\mathfrak{G}$ ノ Borel set $\mathfrak{B}$ ガ存在スル。コノトキ $e_{\gamma^{-1}(\mathfrak{B})}(y^{-1}x)$ ハ m-meßbar，又 $m(\gamma^{-1}(\mathfrak{B})-A)=0$ デアルカラ，$e_{\gamma^{-1}(\mathfrak{B})-A}(y^{-1}x)$ モ亦 m-meßbar デアル。従ッテ

$$e_A(y^{-1}x)=e_{\gamma^{-1}(\mathfrak{B})}(y^{-1}x)-e_{\gamma^{-1}(\mathfrak{B})-A}(y^{-1}x)$$

モ亦 m-meßbar デナケレバナラナイ。

一般ニ G ノ m-meßbar ナ函数 $f(x)$ ハ，有限個ノ m-meßbar ナ charakteristische Funktion ノ一次結合ノ limit トシテ表ハサレル：

$$f(x)=\lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^{J_N}\alpha_j^{(N)}e_{A_j^{(N)}}(x),\qquad (\alpha_j^{(N)}\text{ ハ複素数})$$

従ッテ

$$f(y^{-1}x)=\lim_{N\to\infty}\sum_j\alpha_j^{(N)}e_{A_j^{(N)}}(y^{-1}x).$$

故ニ，各 $e_{A_j^{(N)}}(y^{-1}x)$ ガ m-meßbar デアルカラ

$$f(y^{-1}x)$$

モ m-meßbar デアル。　　　　（証明終）

コノ定理11ノ証明ニ於テ，$y^{-1}x$ ヲ yx デ置換ヘレバ，次ノ定理12ガ得ラレル：

定理12. $m^* = m^*_\mu$ ガ Haar ノ Maß ニヨッテ induzieren サレタ Maß ナルトキ，x ノ函数 $f(x)$ ガ m-meßbar ナラバ，二変数 x, y ノ函数 $f(yx)$ モ m-meßbar デアル.

——（続ク）——